Πανεπιστημιο Ιωαννινων, Τμημα Μαθηματικων,
Αριθμητικη Επιλυση Συνηθων Διαφορικων Εξισωσεων,
διδασκων: Μ. Ξενος

28/01/2015

## Θέματα

**1.** (α) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ y(\alpha) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Η $f$ ικανοποιεί την ολική συνθήκη του Lipschitz ως προς $y$, ομοιόμορφα ως προς $t$. Να δείξετε ότι για την μέθοδο του Euler και για ομοιόμορφο διαμερισμό, $t^n = \alpha + nh$, $0 \le n \le N$, $Nh = \beta - \alpha$, ισχύει η εκτίμηση:

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le e^{L(\beta-\alpha)} |y_0 - z_0| \tag{2}$$

Ποιά συμπεράσματα δίνει η σχέση (2) για την ευστάθεια του προβλήματος αρχικών τιμών; (1.5 μονάδες)
(β) Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \quad t \ge 0, \ \lambda < 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

($i$) Με τη βοήθεια του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών να εκτιμήσετε το διάστημα απόλυτης ευστάθειας για τη μέθοδο του Euler και την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. ($ii$) Να σχεδιάσετε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας για τις δύο παραπάνω μεθόδους (1.5 μονάδες).

**2.** (α) Να δείξετε ότι μια μέθοδος Runge-Kutta έχει τάξη ακρίβειας $p \ge 1$ αν και μόνο αν $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

Αν ισχύει ότι $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$, πώς καλείται η μέθοδος Runge-Kutta; (1.25 μονάδες)
(β) Να δείξετε ότι η μέθοδος Runge-Kutta (πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου) με μητρώο:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

έχει τάξη ακρίβειας δύο (1.25 μονάδες).

**3.** (α) Πότε μια μέθοδος Runge-Kutta ονομάζεται αλγεβρικά ευσταθής; (1 μονάδα)
(β) Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3) με $\lambda = -1$. Να δείξετε ότι η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής (1 μονάδα).

**4.** (α) Έστω η πολυβηματική μέθοδος:

$$\begin{cases} y^0, y^1, ..., y^{k-1}, \\ \alpha_k y^{n+k} + ... + \alpha_0 y^n = h(\beta_k f^{n+k} + ... + \beta_0 f^n), \quad n = 0, ..., N-k. \end{cases} \tag{4}$$

($i$) Πότε η πολυβηματική μέθοδος πληροί τη συνθήκη των ριζών; ($ii$) Πότε η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής; (1.25 μονάδες)
(β) ($i$) Δώστε τις εκφράσεις $\nabla y^{n+3}$, $\nabla^2 y^{n+3}$, $\nabla^3 y^{n+3}$. ($ii$) Με χρήση του ($i$) και της μεθόδου:

$$\begin{cases} y^0, y^1, ..., y^{k-1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = h f^{n+k}, \quad n = 0, ..., N-k, \end{cases} \tag{5}$$

να γράψετε την πολυβηματική μέθοδο που προκύπτει (1.25 μονάδα).

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Καλη Επιτυχια!